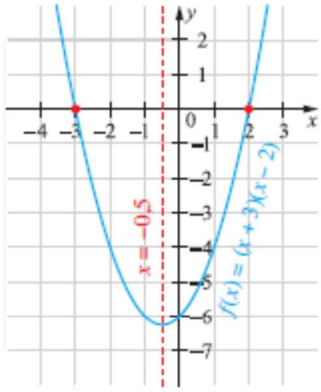
SEM 2D

Temat 3 Największa i najmniejsza wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym

PRZYKŁAD 3.



Wyznaczmy najmniejszą wartość funkcji $f(x) = (x + 3)(x - 2)$.

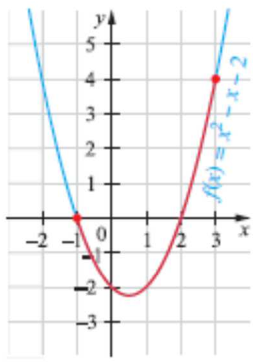
Wzór funkcji jest podany w postaci iloczynowej. Miejscami zerowymi funkcji są $x_1 = -3$ oraz $x_2 = 2$. Wykresem jest parabola mająca oś symetrii o równaniu $x = -0{,}5$. Stąd pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli jest $p = -0{,}5$, a drugą jest $q = f(p) = -6{,}25$. Najmniejszą wartością funkcji $f(x) = (x + 3)(x - 2)$ jest więc $y = -6{,}25$.

Współrzędne wierzchołka (p, q) paraboli możemy wyznaczyć, korzystając z postaci iloczynowej funkcji kwadratowej f: $p = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $q = f(p)$, gdzie x_1, x_2 to miejsca zerowe funkcji f.

Potrafimy już wyznaczyć najmniejszą albo największą wartość funkcji kwadratowej w całym zbiorze $\mathbf{R}$. Często jednak interesuje nas wartość największa lub najmniejsza funkcji w określonym przedziale, nawet w takim, do którego nie należy współrzędna x_w.

PRZYKŁAD 1.

Znajdźmy najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = x^2 - x - 2$ w przedziale $\langle -1; 3 \rangle$.



Sprawdzamy, czy odcięta wierzchołka paraboli $x_w = \frac{1}{2}$ należy do badanego przedziału. Ponieważ $x_w \in \langle -1; 3 \rangle$ oraz ramiona paraboli skierowane są do góry, więc w tym przedziale funkcja przyjmuje wartość najmniejszą dla x_w.

$y_w = f(x_w) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 2 = -2\frac{1}{4}$

Aby znaleźć największą wartość funkcji w podanym przedziale, wyznaczamy wartości funkcji na jego końcach.

$f(-1) = (-1)^2 - (-1) - 2 = 0$

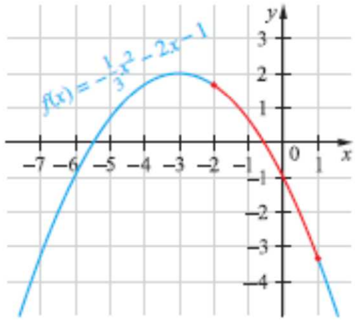
$f(3) = 3^2 - 3 - 2 = 4$

Ponieważ $f(-1) < f(3)$, więc w przedziale $\langle -1; 3 \rangle$ funkcja przyjmuje wartość największą dla $x = 3$. Ta wartość wynosi 4.

PRZYKŁAD 2.

Znajdźmy najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - 2x - 1$ w przedziale $\langle -2; 1 \rangle$.

Sprawdzamy, czy odcięta wierzchołka paraboli należy do badanego przedziału: $x_w = -3$, $-3 \notin \langle -2; 1 \rangle$. Ponieważ funkcja f jest malejąca w przedziale $\langle -3; +\infty)$, więc jest również malejąca w przedziale $\langle -2; 1 \rangle$. Zatem największej i najmniejszej wartości poszukujemy na końcach badanego przedziału.



$f(-2) = -\frac{1}{3} \cdot 4 + 4 - 1 = \frac{5}{3}$ – największa wartość funkcji f w przedziale $\langle -2; 1 \rangle$.

$f(1) = -\frac{1}{3} \cdot 1 - 2 - 1 = -\frac{10}{3}$ – najmniejsza wartość funkcji f w przedziale $\langle -2; 1 \rangle$.