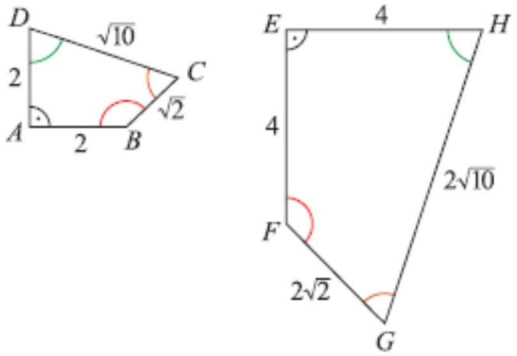
SEM 3D

Temat 4 Wielokąty
Zapoznajcie się z zadaniami w poniższych przykładach. Zwróćcie uwagę na sformułowane wnioski – warto je zapamiętać.

Z gimnazjum wiemy, że wielokątami podobnymi są wielokąty, w których odpowiednie kąty są równe i odpowiednie boki są proporcjonalne. Stosunek długości odpowiednich boków wielokątów podobnych nazywamy **skalą podobieństwa** tych wielokątów.

PRZYKŁAD 1.

Obliczmy stosunek obwodów czworokątów podobnych $ABCD$ i $EFGH$ przedstawionych na rysunku.



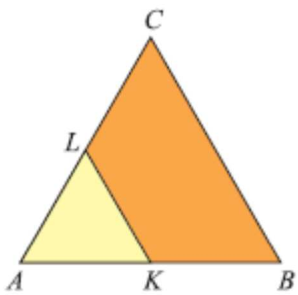
Obwód czworokąta $ABCD$:
$L_{ABCD} = 2 + 2 + \sqrt{2} + \sqrt{10}.$
Obwód czworokąta $EFGH$:
$L_{EFGH} = 4 + 4 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{10} =$
$= 2(2 + 2 + \sqrt{2} + \sqrt{10}).$
Stosunek obwodów tych czworokątów:
$\frac{L_{ABCD}}{L_{EFGH}} = \frac{2+2+\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2(2+2+\sqrt{2}+\sqrt{10})} = \frac{1}{2}.$

Zauważmy, że skala podobieństwa czworokątów $ABCD$ i $EFGH$ także jest równa $\frac{1}{2}$, ponieważ np. $\frac{|AB|}{|EF|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$

Stosunek obwodów wielokątów podobnych w skali k jest równy k.

PRZYKŁAD 2.

W trójkącie równobocznym ABC o boku długości a punkty K i L są środkami boków odpowiednio AB i AC. Wykażmy, że trójkąt AKL jest podobny do trójkąta ABC, oraz obliczmy stosunek pól tych trójkątów.



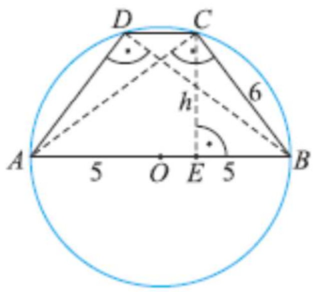
Ponieważ punkt L jest środkiem boku AC, a punkt K jest środkiem boku AB trójkąta ABC, zatem $\frac{|AL|}{|AC|} = \frac{1}{2}$ oraz $\frac{|AK|}{|AB|} = \frac{1}{2}.$
Ponieważ kąty trójkątów AKL i ABC są równe ($KL \parallel BC$) i stosunek długości ich odpowiednich boków jest równy, więc trójkąty te są podobne w skali $k = \frac{1}{2}$.
Pole trójkąta równobocznego ABC: $P_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$
Pole trójkąta równobocznego AKL o boku długości $\frac{a}{2}$: $P_{AKL} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}.$
Stosunek pól trójkątów AKL i ABC:

$$\frac{P_{AKL}}{P_{ABC}} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{16}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Stosunek pól wielokątów podobnych w skali k jest równy k^2.

PRZYKŁAD 3.

W okrąg o promieniu $r = 5$ wpisano trapez $ABCD$ tak, że podstawa AB jest średnicą okręgu. Ramię trapezu BC ma długość 6. Wykażmy, że trapez jest równoramienny, a następnie obliczmy jego pole.



Zauważmy, że:
$|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle BAC|$ – kąty naprzemianległe,
$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BDC|$ – kąty wpisane oparte na tym samym łuku.
Zatem $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle BDC|$. Ponieważ kąty wpisane o równych miarach są oparte na łukach równej długości, więc $|AD| = |BC|$, czyli trapez $ABCD$ jest równoramienny.

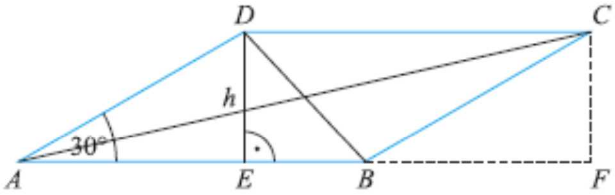
Pole trapezu obliczymy ze wzoru $P = \frac{(a+b)h}{2}$. Należy jeszcze wyznaczyć $b = |CD|$ i h.
Trójkąt ABC jest prostokątny, ponieważ podstawa AB jest średnicą okręgu. Wyznaczmy wysokość trapezu przy użyciu wzorów na pole trójkąta prostokątnego ABC.
$P = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AC| = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h$
Długość AC obliczymy przy użyciu twierdzenia Pitagorasa.
$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2 \qquad |AC|^2 + 36 = 100 \qquad |AC| = \sqrt{100 - 36} = 8$
Mamy: $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot h$, zatem $h = \frac{24}{5}$.

Ponieważ trapez jest równoramienny, więc długość podstawy CD obliczymy przez odjęcie od długości podstawy AB podwojonej długości odcinka EB.
Długość EB wyznaczamy przy użyciu twierdzenia Pitagorasa.
$|EB|^2 + h^2 = |BC|^2$, $|EB|^2 + \left(\frac{24}{5}\right)^2 = 36$, $|EB| = \sqrt{36 - \frac{576}{25}} = \frac{18}{5}$
$|CD| = 10 - 2 \cdot \frac{18}{5} = \frac{14}{5}$
Pole trapezu jest równe: $P = \frac{\left(10 + \frac{14}{5}\right)}{2} \cdot \frac{24}{5} = \frac{64}{10} \cdot \frac{24}{5} = 30\frac{18}{25}$.

Trapez wpisany w okrąg jest trapezem równoramiennym.

PRZYKŁAD 4.

W równoległoboku $ABCD$ o bokach długości 8 cm i 6 cm kąt ostry ma miarę $30°$. Obliczmy pole tego równoległoboku oraz długości jego przekątnych.



W trójkącie AED $\sin 30° = \frac{h}{6}$, stąd otrzymujemy $h = 3$ [cm].
Pole równoległoboku obliczymy ze wzoru $P = a \cdot h$.
$P = 8 \cdot 3 = 24$ [cm^2]
Długość przekątnej BD obliczymy przy użyciu twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta EBD.

Na początku obliczamy długość odcinka AE: $\cos 30° = \frac{|AE|}{6}$, $|AE| = 3\sqrt{3}$ [cm], stąd otrzymujemy $|EB| = 8 - 3\sqrt{3}$ [cm].

$|BD|^2 = h^2 + |EB|^2 = 3^2 + \left(8 - 3\sqrt{3}\right)^2 = 9 + 64 - 48\sqrt{3} + 27 = 100 - 48\sqrt{3}$, czyli

$|BD| = 2\sqrt{25 - 12\sqrt{3}}$ [cm]

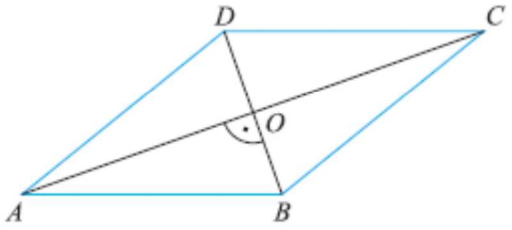
Długość przekątnej AC obliczymy przy użyciu twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AFC.
Ponieważ $|AE| = |BF| = 3\sqrt{3}$ [cm], więc

$|AC|^2 = |CF|^2 + |AF|^2 = 3^2 + \left(8 + 3\sqrt{3}\right)^2 = 9 + 64 + 48\sqrt{3} + 27 = 100 + 48\sqrt{3}$,

stąd $|AC| = 2\sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$ [cm].

PRZYKŁAD 5.

Obliczymy pole rombu o boku długości 12 cm, jeśli jego krótsza przekątna ma długość 8 cm.



Przekątna BD dzieli romb $ABCD$ na dwa przystające trójkąty równoramienne, których suma wysokości AO i CO jest równa długości przekątnej AC. Zatem przekątne rombu są prostopadłe i dzielą się na połowy.
Pole rombu jest równe:

$P = \frac{1}{2} \cdot |BD| \cdot |AO| + \frac{1}{2} \cdot |BD| \cdot |CO| = \frac{1}{2} \cdot |BD| \cdot \frac{1}{2} \cdot |AC| + \frac{1}{2} \cdot |BD| \cdot \frac{1}{2} \cdot |AC| =$

$= \frac{1}{2}|BD| \cdot |AC|$.

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego dla trójkąta ABO otrzymujemy:
$|AO|^2 = 144 - 16 = 128$, stąd $|AO| = 8\sqrt{2}$ [cm], czyli $|AC| = 16\sqrt{2}$ [cm].
$P = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 16\sqrt{2} = 64\sqrt{2}$ [cm^2]