SEM 5

(2) Dzień dobry Zapoznaj się z poniższym materiałem. Zapamiętaj jak wyznaczyć średnią arytmetyczną, średnią ważoną, medianę i dominantę (modę). Sprawdź co zamieszczone jest w „wybranych wzorach matematycznych”.

Liczby charakteryzujące dane zebrane w badaniach statystycznych

W tym rozdziale zajmiemy się miarami, które charakteryzują dane zebrane w badaniu statystycznym. Są to: średnia arytmetyczna, średnia ważona, mediana i moda.

PRZYKŁAD 1.

Na diagramie słupkowym pionowym zilustrowano liczebność wszystkich klas w szkole. Obliczmy, ilu średnio uczniów uczy się w jednej klasie tej szkoły.

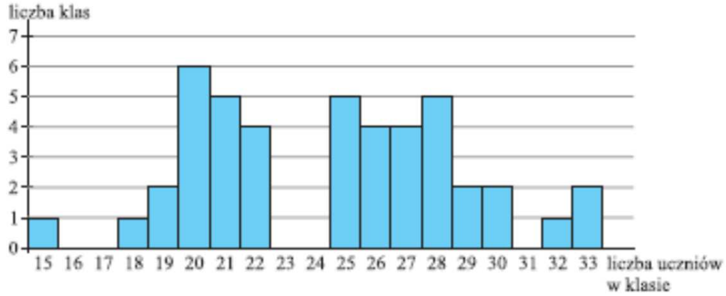

Diagram słupkowy, na którym przedstawiamy rozkład liczebności, nazywa się również histogramem.
W szkole są: $1+1+2+6+5+4+5+4+4+5+2+2+1+2=44$ klasy. W tych klasach uczy się: $1\cdot15+1\cdot18+2\cdot19+6\cdot20+5\cdot21+4\cdot22+5\cdot25+4\cdot26+$ $+\,4\cdot27+5\cdot28+2\cdot29+2\cdot30+1\cdot32+2\cdot33=1077$ uczniów. Wobec tego średnio w każdej klasie tej szkoły jest $\frac{1077}{44}\approx 24{,}48$ uczniów, czyli około 24 uczniów.

Definicja

Średnia arytmetyczna n danych liczbowych $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ to liczba

$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n}.$$

PRZYKŁAD 4.

Firma zatrudnia 20 pracowników, których zarobki wynoszą: 19 287 zł – 1 osoba, 13 802 zł – 1 osoba, 4304 zł – 5 osób, 2820 zł – 12 osób i 1317 zł – 1 osoba. Wyznaczmy średnie miesięczne wynagrodzenie w tej firmie.
Średnie wynagrodzenie w tej firmie to

$$\overline{x}=\frac{1\cdot19\,287+1\cdot13\,802+5\cdot4304+12\cdot2820+1\cdot1317}{20}=4488{,}30\text{ zł}.$$

Średnia arytmetyczna również w tym przypadku nie w pełni opisuje wysokość wynagrodzenia w tej firmie.

Definicja

Średnią ważoną n danych liczbowych $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, z których każda ma przyporządkowaną nieujemną wagę $w_1, w_2, w_3, ..., w_n$, jest liczba

$$\frac{w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + w_3 \cdot x_3 + ... + w_n \cdot x_n}{w_1 + w_2 + w_3 + ... + w_n}.$$

Średnia ważona różni się od średniej arytmetycznej tym, że danym liczbowym przypisuje się wagi (nieujemne). Dane z przypisanymi większymi wagami mają większy udział w określeniu średniej ważonej niż dane z mniejszymi wagami. Często wagi dobiera się tak, aby ich suma była równa 1.
Jeśli wszystkie wagi są równe, to średnia ważona jest równa średniej arytmetycznej.

PRZYKŁAD 5.

Ocena końcowa z pewnego przedmiotu jest wystawiana na podstawie średniej ważonej ocen cząstkowych. Największą wagę 5 przypisano ocenie z pracy klasowej. Ocenie z kartkówki przyporządkowano wagę 2, ocenie z odpowiedzi ustnej – wagę 3 i ocenie z pracy domowej – wagę 1. Porównajmy średnią arytmetyczną ze średnią ważoną ocen, jeśli uczeń otrzymał następujące oceny: z prac klasowych: 3, 4, 2; z kartkówek: 3, 4, 5; z odpowiedzi ustnych: 3; z prac domowych: 5, 5, 5.

Średnia arytmetyczna ocen ucznia: $\overline{x} = \frac{3+4+2+3+4+5+3+5+5+5}{10} = 3{,}9$.

Zatem gdyby ocena końcowa była obliczana na podstawie średniej arytmetycznej ocen cząstkowych, to uczeń mógłby otrzymać czwórkę.
Średnia ważona ocen ucznia:

$$\frac{5 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 5 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 5}{5+5+5+2+2+2+3+1+1+1} \approx 3{,}44.$$

Zastosowanie średniej ważonej do wyznaczenia oceny końcowej sprawia, że uczeń otrzyma zapewne ocenę dostateczną.

Definicja

Mediana, nazywana również **wartością środkową**, to wartość danej znajdującej się pośrodku danych uporządkowanych niemalejąco, jeśli liczba danych jest nieparzysta, lub średnia arytmetyczna dwóch danych znajdujących się pośrodku danych uporządkowanych niemalejąco, jeśli liczba danych jest parzysta. Medianę oznaczamy jako *Me*.

PRZYKŁAD 6.

Wyznaczmy medianę zbioru danych:
a) 10, 1, 8, 5, 2, 3, 8,
b) 10, 1, 3, 5, 2, 7, 8, 11.

a) Porządkujemy zestaw danych: 1, 2, 3, 5, 8, 8, 10.

↑
środkowa dana

Wartością środkową, czyli medianą, zbioru danych 10, 1, 8, 5, 2, 3, 8, jest 5.

b) Porządkujemy zestaw danych: 1, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 11.

↑↑
środkowe dane

Pośrodku znajdują się dwie dane, więc obliczamy ich średnią arytmetyczną $\frac{5+7}{2} = 6$.
Medianą zbioru 10, 1, 3, 5, 2, 7, 8, 11 jest 6.

Definicja

Moda, zwana również **dominantą**, jest najczęściej występującą wartością wśród zebranych danych. Oznaczamy ją jako D.
Jeśli w zbiorze danych występują dwie liczby o takiej samej, najwyższej częstotliwości występowania, to zbiór danych jest **bimodalny**. Jeśli jest kilka takich liczb, to zbiór danych jest **multimodalny**. Jeśli żadna wartość się nie powtarza, to zbiór nie ma mody.

PRZYKŁAD 10.

Do klasy pierwszej szkoły ponadgimnazjalnej przyjęto 30 uczniów, którzy na egzaminie gimnazjalnym w części matematyczno-przyrodniczej otrzymali następujące wyniki:

Liczba otrzymanych punktów	38	40	41	43	44	48
Liczba uczniów	3	1	6	12	5	3

Najwięcej uczniów tej klasy otrzymało 43 punkty, zatem moda jest równa 43.