SEM 3

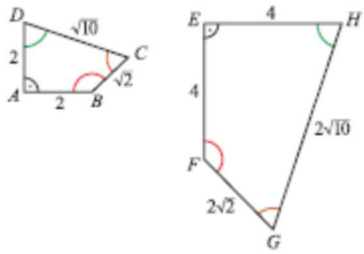
(3) Dzień dobry. Przeczytajcie wiadomości o figurach podobnych. Rozwiążcie samodzielnie zadania, których treść jest w poniższych przykładach.

Wielokąty

Z gimnazjum wiemy, że wielokątami podobnymi są wielokąty, w których odpowiednie kąty są równe i odpowiednie boki są proporcjonalne. Stosunek długości odpowiednich boków wielokątów podobnych nazywamy **skalą podobieństwa** tych wielokątów.

PRZYKŁAD 1.

Obliczmy stosunek obwodów czworokątów podobnych $ABCD$ i $EFGH$ przedstawionych na rysunku.



Obwód czworokąta $ABCD$:

$L_{ABCD} = 2 + 2 + \sqrt{2} + \sqrt{10}.$

Obwód czworokąta $EFGH$:

$L_{EFGH} = 4 + 4 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{10} =$

$= 2(2 + 2 + \sqrt{2} + \sqrt{10}).$

Stosunek obwodów tych czworokątów:

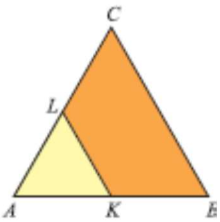
$\frac{L_{ABCD}}{L_{EFGH}} = \frac{2+2+\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2(2+2+\sqrt{2}+\sqrt{10})} = \frac{1}{2}.$

Zauważmy, że skala podobieństwa czworokątów $ABCD$ i $EFGH$ także jest równa $\frac{1}{2}$, ponieważ np. $\frac{|AB|}{|EF|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Stosunek obwodów wielokątów podobnych w skali k jest równy k.

PRZYKŁAD 2.

W trójkącie równobocznym ABC o boku długości a punkty K i L są środkami boków odpowiednio AB i AC. Wykażmy, że trójkąt AKL jest podobny do trójkąta ABC, oraz obliczmy stosunek pól tych trójkątów.



Ponieważ punkt L jest środkiem boku AC, a punkt K jest środkiem boku AB trójkąta ABC, zatem $\frac{|AL|}{|AC|} = \frac{1}{2}$ oraz $\frac{|AK|}{|AB|} = \frac{1}{2}$.

Ponieważ kąty trójkątów AKL i ABC są równe $(KL \parallel BC)$ i stosunek długości ich odpowiednich boków jest równy, więc trójkąty te są podobne w skali $k = \frac{1}{2}$.

Pole trójkąta równobocznego ABC: $P_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Pole trójkąta równobocznego AKL o boku długości $\frac{a}{2}$: $P_{AKL} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$.

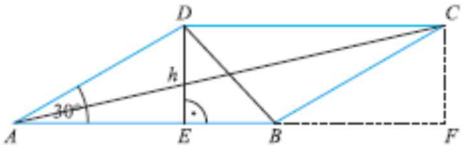
Stosunek pól trójkątów AKL i ABC:

$$\frac{P_{AKL}}{P_{ABC}} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{16}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Stosunek pól wielokątów podobnych w skali k jest równy k^2.

PRZYKŁAD 4.

W równoległoboku $ABCD$ o bokach długości 8 cm i 6 cm kąt ostry ma miarę 30°. Obliczmy pole tego równoległoboku oraz długości jego przekątnych.



W trójkącie AED $\sin 30^\circ = \frac{h}{6}$, stąd otrzymujemy $h = 3$ [cm].

Pole równoległoboku obliczymy ze wzoru $P = a \cdot h$.

$P = 8 \cdot 3 = 24$ [cm^2]

Długość przekątnej BD obliczymy przy użyciu twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta EBD.

Na początku obliczamy długość odcinka AE: $\cos 30^\circ = \frac{|AE|}{6}$, $|AE| = 3\sqrt{3}$ [cm], stąd otrzymujemy $|EB| = 8 - 3\sqrt{3}$ [cm].

$|BD|^2 = h^2 + |EB|^2 = 3^2 + \left(8 - 3\sqrt{3}\right)^2 = 9 + 64 - 48\sqrt{3} + 27 = 100 - 48\sqrt{3}$, czyli

$|BD| = 2\sqrt{25 - 12\sqrt{3}}$ [cm]

Długość przekątnej AC obliczymy przy użyciu twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AFC.

Ponieważ $|AE| = |BF| = 3\sqrt{3}$ [cm], więc

$|AC|^2 = |CF|^2 + |AF|^2 = 3^2 + \left(8 + 3\sqrt{3}\right)^2 = 9 + 64 + 48\sqrt{3} + 27 = 100 + 48\sqrt{3}$,

stąd $|AC| = 2\sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$ [cm].