SEM 4

Dzień dobry. **(1)** Podczas ostatniego spotkania podsumowaliśmy ciąg arytmetyczny. Przed Wami lektura dotycząca ciągu geometrycznego. Proszę przeczytajcie poniższe informacje z podręcznika i na koniec rozwiążcie zadania.

Ciąg geometryczny

Jeśli czas połowicznego rozpadu substancji radioaktywnej wynosi 12 godzin, to oznacza, że po upływie 12 godzin pozostaje tylko połowa początkowej masy substancji (połowa zamienia się w inną substancję). Po kolejnych 12 godzinach ubywa jej znów połowa itd. Prześledźmy rozpad 100 g tej substancji.

Czas [h]	0	12	24	36	48
Masa substancji [g]	100	50	25	12,5	6,25

Kolejne liczby: 100, 50, 25, 12,5, 6,25, ... są wyrazami pewnego ciągu liczbowego, w którym stały jest iloraz:

$\frac{50}{100} = \frac{25}{50} = \frac{12{,}5}{25} = \frac{6{,}25}{12{,}5} = \frac{1}{2}$.

Ciąg ten możemy określić następująco: $a_1 = 100$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, gdzie $q = \frac{1}{2}$ i $n \in N_+$.

Definicja

Ciąg liczbowy, w którym dowolny wyraz, z wyjątkiem pierwszego, jest iloczynem wyrazu poprzedniego i ustalonej liczby q, czyli $a_{n+1} = a_n q$ dla $n \in N_+$, nazywamy **ciągiem geometrycznym**. Liczbę q nazywamy **ilorazem ciągu**.

Wypiszmy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego o ustalonym ilorazie q i wyrazie a_1:

a_1

$a_2 = a_1 q$

$a_3 = a_2 q = (a_1 q)q = a_1 q^2$

$a_4 = a_3 q = (a_1 q^2)q = a_1 q^3$

$a_5 = a_4 q = (a_1 q^3)q = a_1 q^4$

...

Twierdzenie

Ciąg geometryczny możemy opisać wzorem ogólnym $a_n = a_1 q^{n-1}$, gdzie $n \in N_+$ i $q \neq 0$. Jeżeli $q = 0$, to ciąg ma postać: $a_1, 0, 0, 0, \ldots$

PRZYKŁAD 1.

Wypiszmy cztery początkowe wyrazy i zapiszmy wzór ogólny ciągu geometrycznego, w którym $a_1 = -5$, $q = 2$. Obliczmy siódmy i dziesiąty wyraz tego ciągu.

Korzystamy z definicji ciągu geometrycznego.

$a_1 = -5$

$a_2 = -5 \cdot 2 = -10$

$a_3 = -10 \cdot 2 = -20$

$a_4 = -20 \cdot 2 = -40$

Korzystamy z twierdzenia i zapisujemy wzór ogólny ciągu $a_n = -5 \cdot 2^{n-1}$.

Obliczamy siódmy i dziesiąty wyraz ciągu.

$a_7 = -5 \cdot 2^{7-1} = -5 \cdot 2^6 = -320$

$a_{10} = -5 \cdot 2^{10-1} = -5 \cdot 2^9 = -2560$

PRZYKŁAD 2.

Zbadajmy, którym wyrazem ciągu 3, 6, 12, ..., 192, ... jest liczba 192.

Wykorzystamy wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego $a_n = a_1 q^{n-1}$, $n \in \boldsymbol{N}_+$.

Dane: $a_1 = 3$, $q = \frac{6}{3} = \frac{12}{6} = 2$ i $a_n = 192$.

Musimy rozwiązać równanie $192 = 3 \cdot 2^{n-1}$, czyli $2^{n-1} = 64$. Wiemy, że $64 = 2^6$, stąd $n - 1 = 6$, czyli $n = 7$.

Zatem liczba 192 jest siódmym wyrazem ciągu arytmetycznego, $a_7 = 192$.

ĆWICZENIE 4.

Oblicz, którym wyrazem ciągu geometrycznego 5, 10, 20, ..., 640, ... jest liczba 640.

PRZYKŁAD 3.

Wyznaczmy pierwszy wyraz, iloraz i wzór ogólny ciągu geometrycznego, jeśli wiemy, że $a_4 = \frac{3}{8}$ i $a_8 = \frac{3}{128}$.

I sposób

Szukamy zależności między czwartym i ósmym wyrazem ciągu.

$a_8 = a_7 q = a_6 q^2 = a_5 q^3 = a_4 q^4$

Zapisujemy równanie $\frac{3}{8} q^4 = \frac{3}{128}$. Zatem:

$q^4 = \frac{3}{128} \cdot \frac{8}{3} = \frac{1}{16}$, czyli $q = \frac{1}{2}$ lub $q = -\frac{1}{2}$.

Jeśli $q = \frac{1}{2}$, to $a_1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$, stąd $a_1 = 3$.

Jeśli $q = -\frac{1}{2}$, to $a_1 \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$, stąd $a_1 = -3$.

Zatem są dwa ciągi, których wyrazy spełniają podane warunki:

- ciąg, w którym $a_1 = 3$, $q = \frac{1}{2}$, $a_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{3}{2^{n-1}}$,
- ciąg, w którym $a_1 = -3$, $q = -\frac{1}{2}$, $a_n = -3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{3}{(-2)^{n-1}}$.

II sposób

Korzystamy ze wzoru ogólnego ciągu geometrycznego $a_n = a_1 q^{n-1}$ i zapisujemy dwa równania: $a_4 = a_1 q^3$ i $a_8 = a_1 q^7$. Otrzymujemy poniższy układ równań.

$$\begin{cases} a_1 q^3 = \frac{3}{8} \\ a_1 q^7 = \frac{3}{128} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 q^3 = \frac{3}{8} \\ a_1 q^3 \cdot q^4 = \frac{3}{128} \end{cases}$$

Otrzymujemy równanie $\frac{3}{8} \cdot q^4 = \frac{3}{128}$ i dalej postępujemy jak w I sposobie.

ĆWICZENIE 5.

Wyznacz pierwszy wyraz, iloraz i wzór ogólny ciągu geometrycznego, jeśli wiesz, że $a_3 = 18$ i $a_7 = 1458$.

Aby rozwiązać zadanie z poleceniem *Wyznacz ciąg geometryczny ...*, wystarczy znaleźć pierwszy wyraz tego ciągu i jego iloraz, ponieważ te dwie wielkości jednoznacznie opisują ciąg geometryczny.

PRZYKŁAD 4.

Wyznaczmy ciąg geometryczny, w którym różnica trzeciego i pierwszego wyrazu jest równa 9, a różnica piątego i trzeciego wyrazu wynosi 36.

Dane: $a_3 - a_1 = 9$ i $a_5 - a_3 = 36$.

Z wzoru na n-ty wyraz ciągu geometrycznego $a_3 = a_1q^2$, $a_5 = a_1q^4$. Zatem:
$a_1q^2 - a_1 = 9$ i $a_1q^4 - a_1q^2 = 36$.
Stąd $a_1(q^2 - 1) = 9$ oraz $a_1q^2(q^2 - 1) = 36$. Ponieważ $q^2 \neq 1$, $q \neq 0$ i $a_1 \neq 0$, więc możemy podzielić równania stronami: $\frac{a_1(q^2-1)}{a_1q^2(q^2-1)} = \frac{9}{36}$.
Otrzymujemy równanie $\frac{1}{q^2} = \frac{1}{4}$, czyli $q = 2$ lub $q = -2$.
Jeśli $q = 2$, to $a_1(2^2 - 1) = 9$, stąd $a_1 = 3$.
Jeśli $q = -2$, to $a_1\left((-2)^2 - 1\right) = 9$, stąd $a_1 = 3$.
Zatem są dwa ciągi, których wyrazy spełniają podany warunek:
- ciąg, w którym $a_1 = 3$ i $q = 2$,
- ciąg, w którym $a_1 = 3$ i $q = -2$.

ĆWICZENIE 6.

Między liczby 1 i 256 wstaw takie trzy liczby, aby powstał pięciowyrazowy ciąg geometryczny.

ĆWICZENIE 7.

Wyznacz ciąg geometryczny, w którym suma pierwszego i trzeciego wyrazu wynosi 52, a kwadrat drugiego wyrazu jest równy 100.

ĆWICZENIE 8.

Wyznacz ciąg geometryczny, w którym:
$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 19\frac{1}{2}$ i $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 13$.

Weźmy trzy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego: a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, gdzie $k \in \mathbf{N}_+$ i $k \geqslant 2$.
Jeśli:
- $a_1 \neq 0$ i $q \neq 0$, to możemy zapisać równość $\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_{k+1}}{a_k} = q$, stąd $a_k^2 = a_{k-1} \cdot a_{k+1}$;
- $q = 0$, to mamy ciąg $a_1, 0, 0, 0, \ldots$, a wyrazy tego ciągu również spełniają warunek $a_k^2 = a_{k-1} \cdot a_{k+1}$.

Jeżeli a_{k-1}, a_k, a_{k+1} są trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, to $a_k^2 = a_{k-1} \cdot a_{k+1}$, gdzie $k \in \mathbf{N}_+$ i $k \geqslant 2$.

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Ciągiem geometrycznym jest ciąg

A. $-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \ldots$ **B.** $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$ **C.** $-\frac{1}{4}, -2, -8, \ldots$ **D.** $-1, 5, ?, \ldots$

2. W ciągu geometrycznym o wyrazach dodatnich $a_4 = \frac{8}{27}$ i $a_6 = \frac{32}{243}$. Wówczas

A. $q = -\frac{2}{3}$ **B.** $q = \frac{4}{9}$ **C.** $q = \frac{2}{3}$ **D.** $q = -\frac{4}{9}$

3. Wyznacz $x \in \mathbf{R}$ tak, aby liczby $x - 2$, $5x + 10$, $x - 50$ były kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.

4. Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego, w którym $b_3 = 27$ i $b_8 = -\frac{1}{9}$.

5. Oblicz a_1 i q w ciągu geometrycznym, jeśli $a_2 + a_3 = 24$ i $a_7 + a_8 = 5832$.

6. Wyznacz cztery liczby, które wstawione między 2 i 6250 utworzą wraz z tymi liczbami sześciowyrazowy ciąg geometryczny.