SEM 4

Dzień dobry. **(2)** Zapoznajcie się z zamieszczonym materiałem. Tym razem dowiecie się o sumie wyrazów ciągu geometrycznego. Na koniec rozwiążcie zadania.

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

PRZYKŁAD 1.

Obliczmy sumę wyrazów skończonego ciągu geometrycznego 6, 18, 54, 162, 486, 1458.

Jest to sześciowyrazowy ciąg, w którym $a_1 = 6$ i $q = \frac{18}{6} = 3$. Zauważmy, że:

$S_6 = 6 + 18 + 54 + 162 + 486 + 1458$

$3S_6 = 18 + 54 + 162 + 486 + 1458 + 4374.$

Zapisujemy równania w odwrotnej kolejności i odejmujemy je stronami:

$$\begin{array}{rl} 3S_6 = & 18 + 54 + 162 + 486 + 1458 + 4374 \\ - \quad S_6 = & 6 + 18 + 54 + 162 + 486 + 1458 \\ \hline 2S_6 = & -6 + 4374 \\ S_6 = & 2184 \end{array}$$

Zatem $6 + 18 + 54 + 162 + 486 + 1458 = 2184$.

ĆWICZENIE 1.

Oblicz sumę wyrazów ciągu geometrycznego.

a) $-1, 3, -9, 27, -81, 243, -729, 2187$

b) $\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}$

Niech S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów dowolnego, skończonego ciągu geometrycznego. Wówczas:

$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + ... + a_1q^{n-1}.$

Mnożymy tę sumę przez iloraz q i otrzymujemy:

$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 + ... + a_1q^n.$

Odejmujemy równania stronami:

$$\begin{array}{rl} S_n = & a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + ... + a_1q^{n-1} \\ - \; qS_n = & a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 + ... + a_1q^n \\ \hline S_n - qS_n = & a_1 - a_1q^n \end{array}$$

$S_n(1-q) = a_1(1-q^n)$

Jeśli założymy, że $q \neq 1$, to $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$. Dla $q = 1$ ciąg geometryczny ma postać $a_1, a_1, a_1, ...,$ zatem suma jego n początkowych wyrazów jest równa na_1.

Twierdzenie

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) dla $n \in N_+$ jest określona wzorem $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, gdy $q \neq 1$, oraz $S_n = na_1$, gdy $q = 1$.

PRZYKŁAD 2.

Wyznaczmy sumę $S_n = 10 + 5 + \frac{5}{2} + ... + \frac{5}{64}$.

Składniki tej sumy są wyrazami skończonego ciągu geometrycznego, w którym:

$a_1 = 10, q = \frac{1}{2}, a_n = \frac{5}{64}$.

Zaczynamy od obliczenia liczby wyrazów tego ciągu. Korzystamy ze wzoru ogólnego ciągu i otrzymujemy równanie:

$10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{5}{64}$, które doprowadzamy do postaci: $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{128}$.

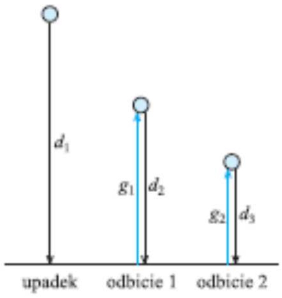
Zauważmy, że $\frac{1}{128} = \left(\frac{1}{2}\right)^7$, stąd $n - 1 = 7$, czyli $n = 8$.

Wyznaczamy sumę ze wzoru $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$. Przyjmujemy, że $a_1 = 10, q = \frac{1}{2}, n = 8$.

$$S_8 = \frac{10 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{10 \cdot \left(1 - \frac{1}{256}\right)}{\frac{1}{2}} = 10 \cdot \frac{255}{256} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1275}{64} = 19\frac{59}{64}$$

PRZYKŁAD 3.

Piłkę upuszczono z wysokości 10 m na twardą powierzchnię, od której piłka odbijała się prostopadle do podłoża na wysokość równą $\frac{5}{8}$ wysokości, z jakiej spadała. Jaką drogę przebyła piłka od momentu upuszczenia do chwili, gdy uderzyła po raz trzeci o podłoże? Wynik podaj z dokładnością do 0,01 m.



Przebyta przez piłkę droga to suma długości odcinków $d_1 + d_2 + d_3 + g_1 + g_2$, które zaznaczyliśmy na rysunku obok.

Obliczmy długość drogi przebytej przez piłkę podczas spadania, czyli sumę $d_1 + d_2 + d_3$. Liczby d_1, d_2, d_3 tworzą trzywyrazowy ciąg geometryczny, w którym $d_1 = 10$, $q = \frac{5}{8}$, $n = 3$.

Zatem $S_3 = \dfrac{10 \cdot \left(1 - \left(\frac{5}{8}\right)^3\right)}{1 - \frac{5}{8}} = \dfrac{10 \cdot \left(1 - \frac{125}{512}\right)}{\frac{3}{8}} = \dfrac{10 \cdot 387 \cdot 8}{3 \cdot 512} = 20{,}15625.$

Obliczamy drogę, jaką przebyła piłka, gdy przemieszczała się do góry:

$g_1 = 10 \cdot \frac{5}{8} = \frac{25}{4} = 6{,}25$ i $g_2 = 10 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{125}{32} = 3{,}90625$,

stąd $g_1 + g_2 = 10{,}15625$.

Całkowita długość drogi przebytej przez piłkę wynosi

$20{,}15625 + 10{,}15625 = 30{,}3125$ [m] $\approx 30{,}31$ [m].

Rozwiąż poniższe zadania (podręcznik str.166)

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Suma $6 - 12 + 24 - 48 + ... - 768$ jest równa

A. -798 **B.** -510 **C.** -678 **D.** 510

2. Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego 2, 8, 32, …, a_n jest równa 682. Wynika stąd, że

A. $a_n = 640$ **B.** $a_n = 608$ **C.** $a_n = 512$ **D.** $a_n = 128$

3. Wyznacz sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

a) $a_1 = 2{,}5$, $q = 1{,}5$, $n = 5$ b) $a_1 = 2$, $a_7 = 1458$, $n = 7$

4. Wyznacz liczbę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

a) $a_1 = -1$, $a_n = -512$, $S_n = 341$ b) $q = 2$, $a_n = 96$, $S_n = 189$

5. Wyznacz pierwszy wyraz, iloraz i liczbę n wyrazów ciągu geometrycznego, jeśli: $a_6 - a_4 = 216$, $a_3 - a_1 = 8$, $S_n = 40$.

6. Wyznacz sumę ośmiu wyrazów ciągu geometrycznego, w którym trzeci wyraz jest równy 5,2, a szósty wyraz to 41,6.

Powodzenia.