Słuchacze sem 3D

Zapoznaj się z tematami „okrąg opisany na trójkącie" oraz „okrąg wpisany w trójkąt"

OKRĄG OPISANY NA TRÓJKĄCIE (podręcznik str. 49)

Twierdzenie

Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest równo oddalony od jego wierzchołków. Punkt ten jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie.

Z twierdzenia wynika, że na każdym trójkącie można opisać okrąg. Mówimy wówczas, że trójkąt jest wpisany w okrąg.

ĆWICZENIE 1.

Opisz okrąg na trójkącie:

a) ostrokątnym, b) prostokątnym, c) rozwartokątnym.

Porównaj położenie środków okręgów opisanych na tych trójkątach.

PRZYKŁAD 3.

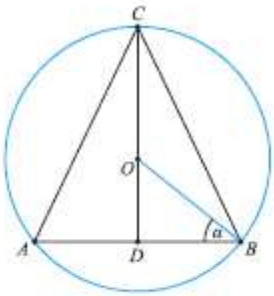
Obliczmy długość promienia okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym ABC, w którym podstawa AB ma długość 12 cm, a ramiona BC i AC mają długość 18 cm.

Środek okręgu opisanego na trójkącie jest równo odległy od jego wierzchołków. Ponieważ trójkąt ABC jest równoramienny i jego ramiona są dłuższe od podstawy, więc środek okręgu opisanego na tym trójkącie zawiera się w wysokości trójkąta. Obliczamy wysokość:

$|CD|^2 = 18^2 - 6^2$

$|CD|^2 = 288$

$|CD| = 12\sqrt{2}$



W trójkącie BDO:

$R^2 = |BD|^2 + |DO|^2$

$|BD| = \frac{1}{2}|AB| = 6$

$|DO| = |DC| - R = 12\sqrt{2} - R$

$R^2 = 6^2 + (12\sqrt{2} - R)^2$

$R^2 = 36 + 288 - 24\sqrt{2}R + R^2$

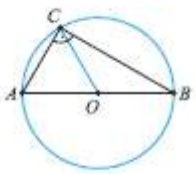
$24\sqrt{2}R = 324$

$R = \frac{324}{24\sqrt{2}} = \frac{27\sqrt{2}}{4}$ [cm]

PRZYKŁAD 4.

Obliczmy długość promienia okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym ABC o przyprostokątnych długości 5 cm i 10 cm.

Ponieważ okrąg jest opisany na trójkącie prostokątnym, więc kąt prosty ACB jest kątem wpisanym w ten okrąg, opartym na jego średnicy. Środek okręgu opisanego należy do przeciwprostokątnej.



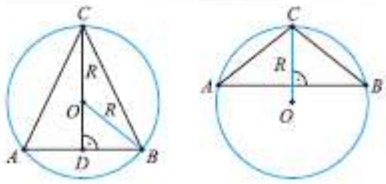
$|AO| = |OB| = R$, zatem promień $R = \frac{1}{2}|AB|$.

Obliczamy długość przeciwprostokątnej:

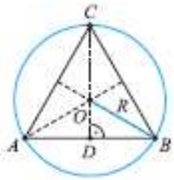
$|AB|^2 = 25 + 100 = 125$, stąd $|AB| = 5\sqrt{5}$. Zatem

$R = \frac{1}{2}|AB| = \frac{5}{2}\sqrt{5}$ [cm].

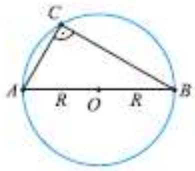
- **Trójkąt równoramienny**
Środek okręgu opisanego na tym trójkącie należy do prostej zawierającej wysokość poprowadzoną na podstawę trójkąta.



- **Trójkąt równoboczny**
Środek okręgu opisanego na tym trójkącie jest punktem przecięcia jego wysokości. Z zależności w trójkącie BDO wynika, że $R = \frac{2}{3}h$, gdzie h jest wysokością trójkąta i $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (a – długość boku trójkąta).



- **Trójkąt prostokątny**
Środek okręgu opisanego na tym trójkącie jest środkiem przeciwprostokątnej.
$R = \frac{1}{2}c$, gdzie c jest długością przeciwprostokątnej.



Rozwiąż poniższe zadania:

2. Promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości 6 cm i 10 cm ma długość

A. 8 cm **B.** $2\sqrt{34}$ cm **C.** $\sqrt{34}$ cm **D.** $2\sqrt{17}$ cm

3. Oblicz pole koła opisanego na trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości $4\sqrt{2}$ cm i $12\sqrt{2}$ cm.

4. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie:
a) równoramiennym o bokach długości 12 cm, 13 cm, 13 cm,
b) równoramiennym o bokach długości 10 cm, 6 cm, 6 cm,
c) równobocznym o boku długości 16 cm,
d) prostokątnym o przyprostokątnych długości 9 cm i 12 cm.

5. W trójkącie ABC boki mają długości odpowiednio 20 cm, 34 cm i 42 cm. Określ położenie środka okręgu opisanego na tym trójkącie.

Powodzenia i do zobaczenia w szkole

OKRĄG WPISANY W TRÓJKĄT (podręcznik str. 54)

Twierdzenie

Dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest równo oddalony od jego boków. Punkt ten jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt.

Z twierdzenia wynika, że w każdy trójkąt można wpisać okrąg. Długość promienia tego okręgu jest równa odległości jego środka od dowolnego boku trójkąta.

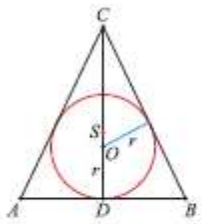
ĆWICZENIE 1.

Wpisz okrąg w trójkąt:

a) ostrokątny, b) prostokątny, c) rozwartokątny.

- **Trójkąt równoramienny**

Środek O okręgu wpisanego w trójkąt równoramienny należy do wysokości poprowadzonej na podstawę tego trójkąta.
Środek O okręgu wpisanego w trójkąt równoramienny, który nie jest trójkątem równobocznym, jest różny od środka S okręgu opisanego na tym trójkącie.

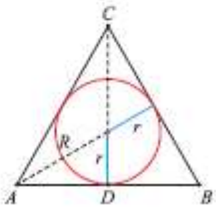


- **Trójkąt równoboczny**

Środek okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny jest punktem przecięcia jego wysokości.
Środek okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny jest jednocześnie środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.

$r = \frac{1}{3}h$, gdzie h jest wysokością trójkąta równobocznego

$r = \frac{1}{2}R$, gdzie R jest promieniem okręgu opisanego na trójkącie równobocznym



PRZYKŁAD 3.

Wyznaczmy zależność między długością promienia okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny a długościami jego boków.

Niech $|AB| = a$, $|AC| = b$, $|BC| = c$.

Na mocy twierdzenia o odcinkach stycznych do okręgu poprowadzonych z danego punktu (s. 33) mamy:

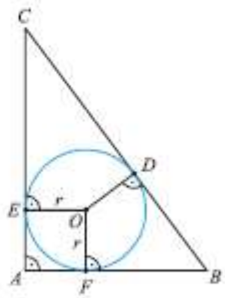
$|AF| = |AE| = r$

$|BD| = |BF| = a - r$

$|CE| = |CD| = b - r$

$c = |CD| + |BD| = b - r + a - r$

Stąd $2r = a + b - c$, czyli $r = \frac{a+b-c}{2}$.



Trójkąt prostokątny

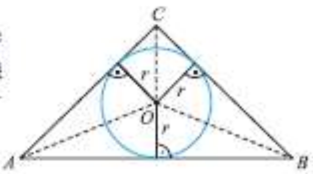
Jeśli w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a, b i przeciwprostokątnej c jest wpisany okrąg o promieniu r, to promień tego okręgu $r = \frac{a+b-c}{2}$.

ĆWICZENIE 2.

Oblicz długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 4 i 6.

PRZYKŁAD 4.

Wyznaczmy wzór na pole trójkąta w zależności od długości jego boków i długości promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.



Niech $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|AC| = c$. Odcinki łączące środek O okręgu z wierzchołkami trójkąta ABC dzielą ten trójkąt na trzy trójkąty: ABO, BCO i ACO, w których promień okręgu r jest wysokością. Zatem:

$P_{ABO} = \frac{1}{2}a \cdot r$, $P_{BCO} = \frac{1}{2}b \cdot r$, $P_{ACO} = \frac{1}{2}c \cdot r$.

Otrzymujemy: $P_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot r + \frac{1}{2}b \cdot r + \frac{1}{2}c \cdot r = \frac{1}{2}(a+b+c)r$. Przyjmijmy oznaczenie $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$, wówczas $P_{ABC} = p \cdot r$.

Jeśli w trójkąt o bokach długości a, b i c jest wpisany okrąg o promieniu r, to pole tego trójkąta $P = p \cdot r$, gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Rozwiąż poniższe zadania:

2. W trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 6 i 8 wpisano okrąg. Promień tego okręgu jest równy

A. 2 **B.** 2,5 **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{4}{3}$

3. W trójkąt prostokątny, którego jedna przyprostokątna ma długość 20 cm, wpisano okrąg o promieniu 8 cm. Oblicz obwód i pole tego trójkąta.

4. W trójkąt równoramienny o kącie rozwartym $120°$ wpisano okrąg o promieniu 5 cm. Oblicz obwód i pole tego trójkąta.

5. Dany jest trójkąt równoramienny o podstawie 3 cm i wysokości opuszczonej na tę podstawę 2 cm. W ten trójkąt wpisano okrąg. Oblicz obwód trójkąta i długość okręgu.

Powodzenia i do zobaczenia w szkole